

## Лекция № 7

### **СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЯХ С ОТДЕЛЬНЫМИ ИДЕАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.**

#### Учебные вопросы

1. Свойства цепи с активным сопротивлением: физический смысл активного сопротивления, закон Ома, мгновенная и активная мощности, движение энергии.
2. Свойства цепи с индуктивностью: индуктивное сопротивление и его частотная характеристика, закон Ома, мгновенная и индуктивная мощности, движение энергии.
3. Свойства цепи с емкостью: емкостное сопротивление и его частотная характеристика, закон Ома, мгновенная и емкостная мощности, движение энергии.

#### **1. Свойства цепи с активным сопротивлением: физический смысл активного сопротивления, закон Ома, мгновенная и активная мощности, движение энергии**

Процессы в цепях переменного тока принципиально отличаются от процессов в цепях постоянного тока. Переменный ток неразрывно связан с возникновением магнитного и электрического полей, которые также изменяются во времени, в результате чего в электрической цепи имеют место явления самоиндукции, взаимоиндукции, возникновение зарядных и разрядных токов, преобразование электрической энергии в тепловую, механическую, электромагнитное излучение.

Учет одновременного действия всех этих явлений приводит к усложнению анализа и расчета электрических цепей переменного тока.

Чтобы упростить рассмотрение всех перечисленных физических процессов, реальную электрическую цепь заменяют идеализированной, составленной из отдельных элементов, каждый из которых характеризует одно из указанных явлений.

Наиболее характерными сосредоточенными элементами в цепях переменного тока являются активное сопротивление  $r$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ .

Указанные научные абстракции имеют большое практическое значение. Они позволили построить теорию электрических цепей переменного тока с сосредоточенными параметрами, охватывающую целый класс реальных электрических цепей с напряжениями промышленной и повышенной частот.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда цепь содержит один сосредоточенный параметр – активное сопротивление (рис. 1,а).

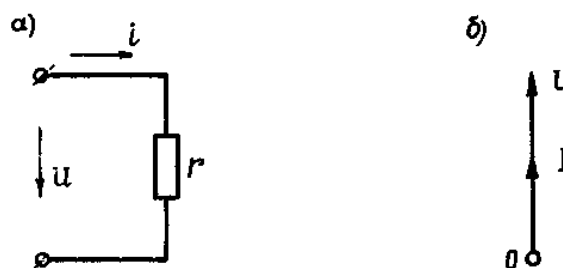


Рис. 1. Цепь переменного тока с активным сопротивлением:  
а – схема; б – векторная диаграмма

Активным сопротивлением в цепях переменного тока называют сопротивление, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую. Активным сопротивлением обладают электрические лампы, различные электронагревательные устройства и приборы, реостаты и другие элементы цепей, у которых можно пренебречь влиянием индуктивности  $L$  и емкости  $C$ .

К рассматриваемой цепи (рис.1,а) приложено напряжение источника, изменяющееся по синусоидальному закону

$$u = U_m \sin \omega t .$$

Мгновенное значение тока

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t = I_m \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $I_m = \frac{U_m}{r}$  – амплитуда тока.

Так как действующие значение напряжения  $U$  и тока  $I$  меньше амплитудных в  $\sqrt{2}$  раз, то действующее значение тока

$$I = \frac{U}{r}. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) видно, что в рассматриваемой цепи применим закон Ома как к амплитудным, так и к действующим значениям тока и напряжения.

Из выражения (1), кроме того, видно, что в цепи, содержащей только активное сопротивление  $r$ , ток, как и напряжение, изменяется во времени по синусоидальному закону, причем обе эти величины совпадают по фазе, т.е.

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 \quad (\text{рис. 1,б}).$$

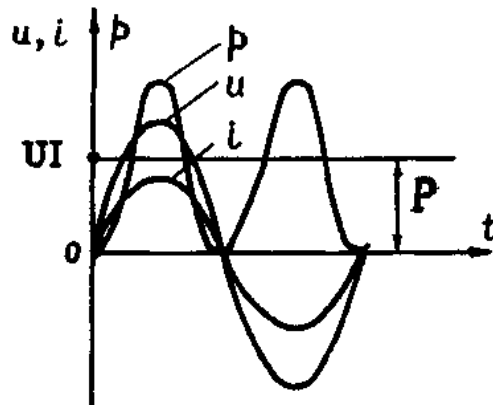
### Мгновенная и активная мощности

Мощность цепи переменного тока в произвольный момент времени называется **мгновенной мощностью**. Значение этой мощности определяется выражением

$$p = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = UI - UI \cos 2\omega t. \quad (3)$$

На рис. 2 представлены графики изменения напряжения  $u$  и тока  $I$ , а также соответствующий напряжению (3) график мгновенной мощности  $p$ . Из графика видно, что мгновенная мощность в цепи с активным сопротивлением все-

гда положительна –  $p > 0$ , а ее потребление осуществляется в виде двух им-



пульсов за период.

Рис. 2. Графики напряжения  $u$ , тока  $i$  и мгновенной мощности  $p$  для цепи переменного тока с активным сопротивлением

Среднее значение мощности за период изменения тока, называемый также активной мощностью, определяется выражением

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt .$$

(4)

Подставляя выражение (3) в (4), получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (UI - UI \cos 2\omega t) dt = UI . \quad (5)$$

Активная мощность, равная произведению действующих значений напряжений и тока, показана на графике, изображенном на рис. 2. Используя формулы (2) и (5), можно получить выражение для активной мощности

$$P = I^2 r , \quad (6)$$

которое находит практическое применение при инженерных расчетах.

Единицей измерения активной мощности в системе “СИ” является Вт, кВт.  $1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$ .

## 2. Свойства цепи с индуктивностью: индуктивное сопротивление и его частотная характеристика, закон Ома, мгновенная и индуктивная мощности, движение энергии

Широкое применение находят электрические цепи переменного тока, состоящие из катушек, обладающих индуктивностью. Причем активное сопротивление, характеризующее тепловые потери  $i^2 r$ , и межвитковая емкость у таких катушек столь незначительны, что ими можно пренебречь. Такие индуктивные катушки принято называть **идеальными**. Рассмотрим свойство электрической цепи, состоящей из идеальной индуктивной катушки (рис.3,а). Пусть в катушке под действием переменного напряжения  $u$  протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ . Ток, имеющий место в катушке, создаст переменное магнитное поле, изменение которого вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = E_{mL} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (7)$$

где  $E_{mL} = \omega L I_m$  – амплитуда ЭДС самоиндукции.

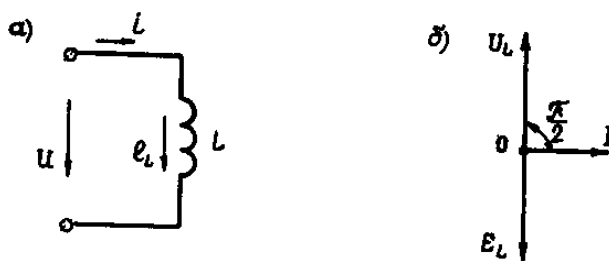


Рис. 3. Цепь переменного тока, содержащая идеальную индуктивную катушку:  
а – схема цепи; б – векторная диаграмма

Чтобы в цепи протекал ток, необходимо иметь на зажимах катушки напряжение, уравновешивающее ЭДС самоиндукции, равное по величине и противоположное ей по знаку

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = E_{mL} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (8)$$

где  $U_{mL} = \omega L I_m$  – амплитуда напряжения  $u = u_L$ .

Выражение (8) показывает, что для поддержания синусоидального тока в цепи с идеальной катушкой напряжение на ее зажимах должно быть также синусоидальным, опережающим по фазе ток на угол  $\pi/2$ . При этом ЭДС самоиндукции, как видно из выражения (7), отстает по фазе от тока на  $\pi/2$ . На рис. 3,б представлена векторная диаграмма цепи переменного тока с идеальной индуктивной катушкой. Несовпадение по фазе тока и напряжения на катушке объясняется тем, что напряжение пропорционально не мгновенному значению тока  $i$ , а скорости его изменения  $di/dt$ , которая имеет максимум при прохождении тока через нулевое значение и минимум при достижении током своего максимального значения.

### Закон Ома. Индуктивное сопротивление

Из формулы (7) для амплитуды напряжения  $U_{mL} = \omega L I_m$  получим выражения действующих значений напряжения и тока, аналогичные по форме закону Ома:

$$U_L = \omega L I \quad \text{и} \quad I = \frac{U_L}{\omega L}. \quad (9)$$

Величина  $\omega L$  в формулах (29) имеет размерность сопротивления (Ом) и называется индуктивным сопротивлением катушки. Обозначается индуктивное сопротивление через  $x_L$

$$x_L = \omega L = 2\pi fL . \quad (10)$$

Индуктивное сопротивление, как видно из выражения (10), прямо пропорционально частоте и индуктивности катушки.

На рис. 4 показаны графики индуктивных сопротивлений для двух постоянных значений  $L_1$  и  $L_2$ .

Из рассмотренных физических процессов в идеальной катушке видно, что индуктивное сопротивление косвенным путем учитывает действие ЭДС самоиндукции, вызванной реакцией цепи при изменении тока во времени. Поэтому индуктивное сопротивление называют еще и **р е а к т и в н ы м** .

Зависимость реактивного индуктивного сопротивления от частоты и индуктивности используется в электроустановках переменного тока при построении схем электрических фильтров, регуляторов тока и напряжения и других устройств.

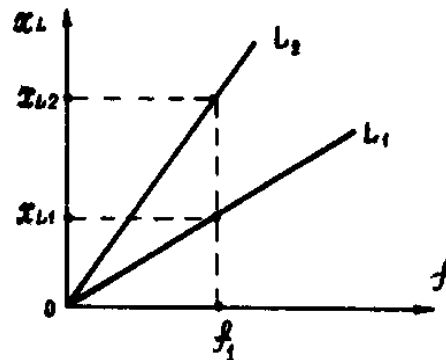


Рис. 4. Графики индуктивных сопротивлений для двух постоянных значений индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  ( $L_2 > L_1$ )

### Мгновенная и реактивная мощности

Мгновенная мощность цепи с индуктивной катушкой

$$p_1 = ui = U_{mL} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t, \quad (11)$$

где  $\frac{U_m I_m}{2} = UI = I^2 x_L$  – амплитуда мгновенной мощности.

Из выражения (11) видно, что мгновенная мощность в цепи с катушкой изменяется по закону синуса с двойной частотой  $2\omega$ . На рис. 5 показаны графики изменения тока  $i$ , напряжения  $u_L$ , ЭДС  $e_L$  и мощности  $p_L$  для цепи с идеальной индуктивной катушкой. Из графиков, изображенных на рис. 5, видно, что в первой и третьей четвертях периода изменения тока катушка запасает энергию в своем магнитном поле, а во вторую и четвертую четверти периода – полностью возвращает ее обратно источнику. Таким образом, в идеальной катушке имеет место периодический обмен энергией между внешним источником и магнитным полем. Несмотря на отсутствие тепловых потерь, такое движение энергии создает нагрузку источнику.

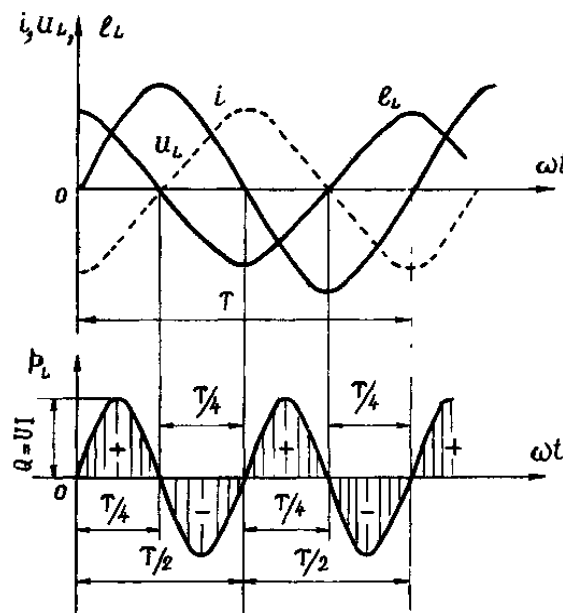


Рис. 5. Графики изменения тока  $i$ , напряжения  $u_L$ , ЭДС  $e_L$  и мощности  $p_L$  для цепи с идеальной индуктивной катушкой



Электрическая нагрузка, которая в течение  $1/4 T$  запасает энергию в магнитном поле, а в следующую четверть периода полностью возвращает ее обратно, называется реактивной индуктивной нагрузкой. Для количественной оценки интенсивности обмена электрической энергией между источником и реактивной нагрузкой введено понятие реактивной мощности:

$$Q_L = UI = I^2 x_L. \quad (12)$$

Мощность, развиваемая током на реактивном сопротивлении катушки, называется реактивной индуктивной мощностью. Для идеальной катушки она численно равна, как видно из выражения (12), максимальному значению мгновенной мощности. Единицей измерения реактивной мощности, в отличие от активной, является вольт-ампер реактивный (вар). Более крупной единицей является квар, причем  $1 \text{ квар} = 10^3 \text{ вар}$ .

В реальной индуктивной катушке часть энергии, передаваемой в цепь, расходуется в виде тепла на активном сопротивлении.

### **3. Свойства цепи с емкостью: емкостное сопротивление и его частотная характеристика, закон Ома, мгновенная и емкостная мощности, движение энергии**

Конденсатор как элемент цепи обладает способностью аккумулировать электрическую энергию, т.е. характеризуется емкостью. В диэлектрике конденсатора отсутствуют свободные электрические заряды. Положительные и отрицательные заряды, имеющиеся в веществе диэлектрика в равном количестве, упруго связаны между собой. При включении конденсатора на постоянное напряжение имеет место кратковременное (в течение долей секунды) протекание тока за счет упругого смещения связанных электрических зарядов. По окончании процесса заряда конденсатора, когда напряжение на его обклад-

ках не будет изменяться и станет равным приложенному извне напряжению, ток смещения в цепи прекращается. При включении конденсатора на напряжение переменного тока происходит непрерывное перемещение электрических зарядов. Причем при увеличении напряжения ток в цепи конденсатора будет заряжать конденсатор, а при уменьшении – разряжать его.

Рассмотрим явления в цепи (рис.2.6,а), состоящей из конденсатора емкостью  $C$ , подключенного к источнику переменного напряжения  $u = U_m \sin \omega t$ .

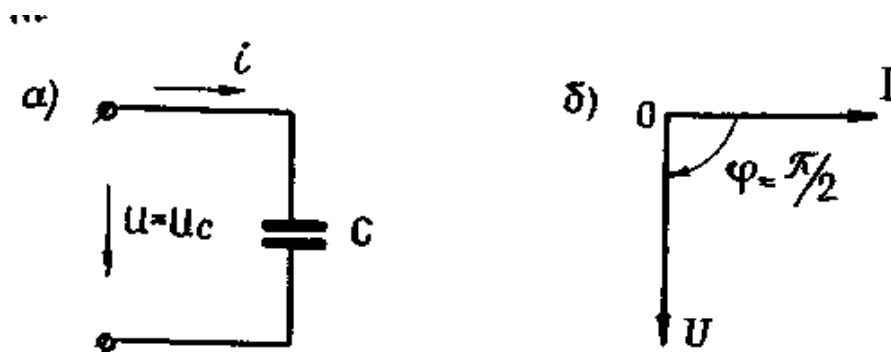


Рис. 6. Цепь переменного тока, содержащая конденсатор емкостью  $C$ :  
а – схема цепи; б – векторная диаграмма

Ток в цепи

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + \pi/2), \quad (13)$$

где  $I_m = \omega C U_m$  – амплитуда тока.

Выражение (13) свидетельствует о том, что ток в цепи, вызванный синусоидальным напряжением, также изменяется по закону синуса и опережает его по фазе на угол  $\pi/2$  (рис.2.6,б).

Это объясняется тем, что зарядный и разрядный токи конденсатора пропорциональны скорости изменения напряжения, которая имеет максимум при

прохождении через нулевое значение и минимум при достижении напряжением своего максимального значения.

### Закон Ома. Емкостное сопротивление

Из формулы (13) для амплитуды тока  $I_m = \omega C U_m$  получим выражение действующего значения тока, аналогичное по форме закону Ома,

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U}{1/\omega C}. \quad (14)$$

Величина  $1/\omega C$  в формуле (14) имеет размерность сопротивления (Ом) и называется емкостным сопротивлением конденсатора.

Емкостное сопротивление обозначается через  $x_C$ :

$$x_C = 1/\omega C = 1/2\pi f C. \quad (15)$$

Емкостное сопротивление, как видно из выражения (15), обратно пропорционально частоте. На рис.7 показаны графики емкостных сопротивлений для двух постоянных значений емкостей конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ .

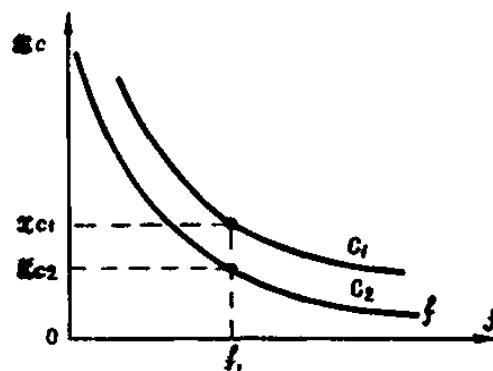


Рис. 7. Графики емкостных сопротивлений для двух постоянных значений емкостей  $C_1$  и  $C_2$  ( $C_2 > C_1$ )

Емкостное сопротивление вызывается реакцией цепи на изменение во времени напряжения на конденсаторе. Поэтому емкостное сопротивление также называют еще и реактивным. Частотная зависимость емкостного сопротивления используется в электроустановках переменного тока, например, при построении схем электрических фильтров.

### Мгновенная и реактивная мощности

Мгновенная мощность цепи с емкостью

$$p_C = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = UI \sin 2\omega t, \quad (16)$$

где  $UI = I^2 x_C$  – амплитуда мгновенной мощности.

Из выражения (16) видно, что мгновенная мощность в цепи с емкостью изменяется также по синусоидальному закону с двойной частотой  $2\omega$ . На рис. 8 показаны графики изменения тока  $i$ , напряжения  $u$  и мощности  $p_C$  для цепи с емкостью.

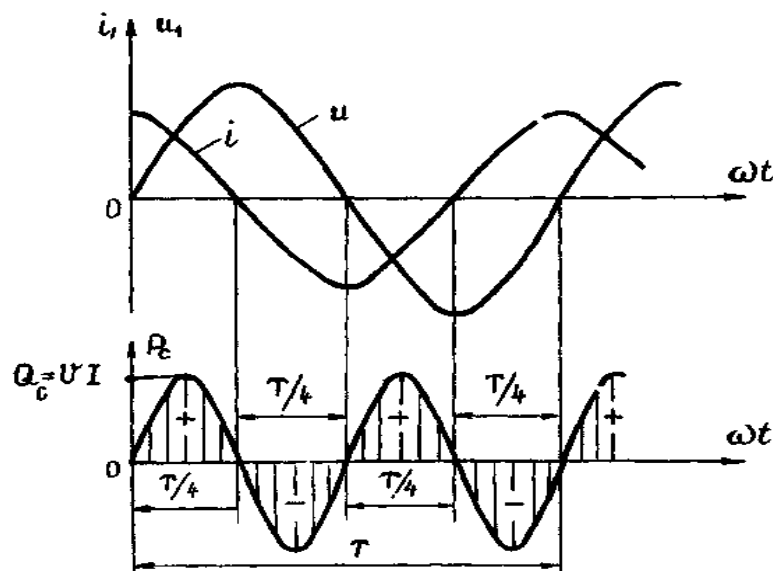


Рис. 8. Графики изменения тока  $i$ , напряжения  $u$  и мощности  $p_C$  для цепи с емкостью

В течение первой и третьей четвертей периода  $T$  конденсатор, заряжаясь, запасает энергию в своем электрическом поле. Во вторую и четвертую четверти периода конденсатор, разряжаясь, полностью возвращает запасенную энергию обратно источнику. Таким образом, и в цепи с емкостью происходит процесс периодического обмена энергией между источником и электрическим полем конденсатора. Такого рода электрическая нагрузка называется реактивной емкостной. Для количественной оценки интенсивности обмена энергией между емкостной нагрузкой конденсатора и источником пользуются понятием реактивной емкостной мощности

$$Q_C = UI = I^2 x_C. \quad (17)$$

Мощность, развиваемая током на реактивной емкостном сопротивлении конденсатора, называется реактивной емкостной мощностью.

Эта величина равна максимальному значению мгновенной мощности в цепи с емкостью (рис. 8).

Единицей измерения реактивной емкостной мощности также является вар.